

GRAF INTERVAL DAN APLIKASINYA DALAM PENGATURAN WAKTU LAMPU LALU LINTAS

Maria Vianney Any Herawati
Universitas Sanata Dharma, Indonesia
any@usd.ac.id

Abstrak

Perkembangan teknologi dan ilmu matematika diskrit telah memberikan kontribusi signifikan dalam optimasi berbagai aspek kehidupan modern, termasuk manajemen lalu lintas. Salah satu konsep matematika yang relevan dalam konteks ini adalah graf interval, yaitu graf yang dapat direpresentasikan sebagai kumpulan interval pada garis bilangan real, di mana dua simpul terhubung jika intervalnya saling beririsan. Graf interval tidak hanya menarik dari segi teoritis tetapi juga memiliki aplikasi praktis, salah satunya dalam pengaturan waktu lampu lalu lintas di persimpangan jalan. Tulisan ini akan membahas tentang graf interval, beberapa sifatnya, dan aplikasinya dalam pengaturan waktu lampu lalu lintas.

Kata kunci: graf, interval, graf interval.

INTERVAL GRAPH AND THE APPLICATION IN TRAFFIC LIGHT TIMING

Maria Vianney Any Herawati
Sanata Dharma University, Indonesia
[any@usd.ac id](mailto:any@usd.ac.id)

Abstract

Technology and discrete mathematics have made significant contributions to the optimization of various aspects of modern life, including traffic management. One mathematical concept relevant in this context is the interval graph, which can be represented as a set of intervals on the real number line, where two nodes are connected if their intervals intersect. Interval graphs are not only interesting from a theoretical point of view but also have practical applications, one of which is in traffic light timing at intersections. This paper will discuss interval graphs, some of their properties, and their application in traffic light timing.

Keywords: graph, interval, interval graph.

Pendahuluan

Dalam matematika diskrit, khususnya teori graf, graf merupakan suatu struktur yang terdiri dari beberapa obyek dan hubungan antar pasangan obyek-obyek tersebut. Secara sederhana, sebuah graf merupakan himpunan dari obyek-obyek yang dinamakan titik yang dihubungkan oleh penghubung yang dinamakan garis. Dalam graf tidak berarah, sebuah garis dari titik A ke titik B dianggap sama dengan garis dari titik B ke titik A . Dalam graf berarah, garis tersebut memiliki arah. Pada dasarnya, sebuah graf digambarkan dengan bentuk diagram sebagai himpunan dari titik-titik yang dihubungkan dengan garis.[3]

Perkembangan teknologi dan ilmu matematika diskrit telah memberikan kontribusi signifikan dalam optimasi berbagai aspek kehidupan modern, termasuk manajemen lalu lintas. Salah satu konsep matematika yang relevan dalam konteks ini adalah graf interval, yaitu graf yang dapat direpresentasikan sebagai kumpulan interval pada garis bilangan real, di mana dua simpul terhubung jika intervalnya saling beririsan. Graf interval tidak hanya menarik dari segi

teoritis tetapi juga memiliki aplikasi praktis, salah satunya dalam pengaturan waktu lampu lalu lintas di persimpangan jalan.[4]

Permasalahan lalu lintas di persimpangan yang padat memerlukan solusi sistematis untuk meminimalkan kemacetan dan memaksimalkan arus kendaraan. Dengan memodelkan persimpangan sebagai graf interval, di mana setiap interval merepresentasikan waktu lampu hijau suatu jalur, kita dapat mengatur sedemikian rupa sehingga interval-interval yang bertabrakan (overlap) dihindari. Pendekatan ini memungkinkan penjadwalan lampu lalu lintas yang efisien, mengurangi konflik antar kendaraan, dan meningkatkan kelancaran arus lalu lintas.

Artikel ini akan membahas konsep dasar graf interval, representasinya dalam pengaturan lampu lalu lintas, serta bagaimana algoritma berbasis graf interval dapat diterapkan untuk menghasilkan pengaturan waktu lampu lalu lintas yang optimal. Dengan demikian, diharapkan model ini dapat menjadi salah satu solusi inovatif dalam manajemen transportasi perkotaan.

Metode

Penelitian yang dipakai di sini adalah kajian literatur [1], [2], [3], [4] dengan urutan pembahasan mulai dari definisi terminologi dan notasi dalam teori graf yang diperlukan, dilanjutkan ke topik utama yaitu graf interval dan sifat-sifatnya, serta contoh penerapan graf interval dalam pengaturan waktu lampu lalu lintas.

Hasil dan Pembahasan

Notasi dan Terminologi

Definisi 1.[1] *Graf* $G = (V, E)$ Adalah struktur matematik yang terdiri dari dua himpunan berhingga V dan E . Elemen dari V disebut *titik* (atau *simpul*), dan elemen dari E disebut *garis*. Setiap garis mempunyai satu atau dua titik yang berasosiasi dengan garis tersebut, yang disebut *titik ujung*.

Definisi 2. [2] Garis $\{v, w\}$ dikatakan *menghubungkan* titik v dan w , dan biasanya disingkat dengan vw atau wv . Dua titik v dan w dikatakan *bertetangga* bila ada garis vw yang menghubungkan titik v dan w , dan titik v dan w dikatakan *bersisian* dengan garis vw . Dua garis e dan f dikatakan *bertetangga* bila kedua garis tersebut memiliki titik ujung sama.

Definisi 3. [1] Garis *sejati* adalah garis yang menghubungkan dua titik yang berbeda. *Loop* adalah garis yang menghubungkan satu titik ujung ke titik itu sendiri. *Garis rangkap* adalah kumpulan dua atau lebih garis yang mempunyai titik-titik ujung sama. *Graf sederhana* adalah graf yang tidak memiliki loop maupun garis rangkap.

Notasi : Bila G bukan satu-satunya graf yang dibahas, notasi $V(G)$ dan $E(G)$ digunakan untuk menyatakan himpunan titik dan himpunan garis dari G .

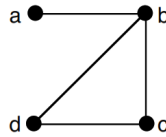
Definisi 4. [2] *Derajat* dari titik v adalah banyaknya garis yang bersisian dengan v , dan ditulis $\deg(v)$; loop pada v disepakati menyumbang 2 ke derajat dari v .

Definisi 5.[1] *Graf siklus* adalah satu titik dengan loop atau graf sederhana C dengan $|V(C)| = |E(C)|$ yang dapat digambar sehingga semua titik dan garisnya berada pada satu lingkaran. Graf siklus dengan n titik dinotasikan dengan C_n .

Definisi 6. [1] Graf sederhana G dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ disebut *graf irisan* bila ada keluarga himpunan $F = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ sedemikian hingga titik v_i bertetangga dengan v_j bila dan hanya bila $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

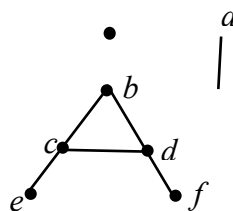
Definisi 7. [3] *Graf interval* adalah graf irisan dari keluarga interval pada garis real. Untuk setiap titik v di G , terdapat interval dari garis real $J(v)$ sedemikian hingga $uv \in E(G)$ bila dan hanya bila $J(u) \cap J(v) \neq \emptyset$. Dalam hal ini intervalnya bisa buka ataupun tutup.

Contoh 1. Graf dalam Gambar 1 adalah graf interval untuk keluarga interval berikut
 $a = (1,3), b = (2,6), c = (5,8), d = (4,7)$.



Gambar 1. Graf interval

Contoh 2. Akan ditunjukkan bahwa siklus C_4 bukan merupakan graf interval. Misal $V(C_4) = \{a, b, c, d\}$ dan ab, bc, cd, da adalah keempat garis dari C_4 , maka $J(a) \cap J(b) \neq \emptyset$, $J(b) \cap J(c) \neq \emptyset$, $J(c) \cap J(d) \neq \emptyset$, dan $J(d) \cap J(a) \neq \emptyset$, yang mengakibatkan $J(a) \cap J(c) \neq \emptyset$ atau $J(b) \cap J(d) \neq \emptyset$, yaitu $ac \in E(C)$ atau $bd \in E(C)$. Berarti banyaknya garis lebih dari 4. Kontradiksi dengan syarat graf siklus. Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa graf dalam Gambar 2 juga bukan merupakan graf interval.



Gambar 2. Bukan graf interval.

Definisi 8 . [3] Graf ada 2 macam yaitu graf tak berarah dan graf berarah. Yang dimaksud dengan *arah* dari graf G adalah pemberian tanda panah ke setiap garis dari G . Apabila G adalah graf berarah, maka garis di G disebut *busur* dan notasi untuk garis pada G adalah dengan pasangan terurut (a, b) atau ab yang tidak sama dengan ba , Graf berarah G dikatakan *memiliki arah yang transitif* bila $(a, b) \in E(G)$ dan $(b, c) \in E(G)$, maka $(a, c) \in E(G)$.

Definisi 9. [3] Misal G adalah graf sederhana. Komplemen G^c dari G didefinisikan dengan mengambil $V(G^c) = V(G)$ dan dua titik u dan v bertetangga di G^c bila dan hanya bila u dan v tidak bertetangga di G .

Definisi 10. [3] Graf H disebut *graf bagian* dari graf G bila $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Graf bagian H dari G disebut *graf bagian yang diinduksi* dari G bila setiap garis dari G yang kedua titik ujungnya di $V(H)$ juga merupakan garis dari H . Bila H adalah graf bagian dari G , maka G disebut *super graf* dari H .

Definisi 11.[2] Graf sederhana yang setiap pasang titiknya bertetangga disebut *graf lengkap*. [3] Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n . *Klik* dari graf G adalah graf bagian lengkap dari G . *Klik K* dari G disebut *klik maksimal* bila K tidak termuat secara sejati dalam klik lain dari G .

Definisi 12. [3] *Graf sirkular* adalah graf interval sedemikian hingga $J(a)$ berupa busur dari suatu lingkaran tertentu.

Definisi 13 . [3] Misal $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah graf sederhana. Graf $G = (V, E)$, dengan $V = V_1 \cup V_2$ dan $E = E_1 \cup E_2$ disebut *gabungan* dari E_1 dan E_2 dan dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$. Bila $G_1 \cup G_2$ saling asing, $G_1 \cup G_2$ dinotasikan dengan $G_1 + G_2$ dan disebut *jumlah* dari G_1 dan G_2 .

Definisi 14. [3] Misal G_1 dan G_2 adalah dua graf dengan himpunan titik yang saling asing. Maka join $G_1 \vee G_2$ dari G_1 dan G_2 adalah super graf dari $G_1 + G_2$ yang setiap titik dari G_1 juga bertetangga dengan setiap titik dari G_2 .

Sifat-Sifat Graf Interval

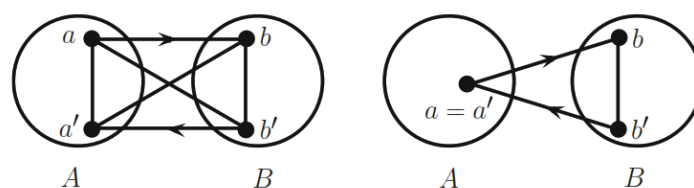
Teorema 1. Misal G adalah graf interval, maka G^c memiliki orientasi transitif.

Bukti : Misal $J(a)$ menyatakan interval yang mewakili titik a dari graf interval G . Misal $ab \in E(G^c)$ dan $bc \in E(G^c)$, sehingga $ab \notin E(G)$ dan $bc \notin E(G)$. Akibatnya $J(a) \cap J(b) = \emptyset$, dan $J(b) \cap J(c) = \emptyset$. Selanjutnya, diberikan arah untuk busur-busur dari G^c dengan arah busur xy bila dan hanya bila $J(x)$ terbentang di sebelah kiri $J(y)$. Maka $J(a)$ terbentang di sebelah kiri $J(b)$ dan $J(b)$ terbentang di sebelah kiri $J(c)$, akibatnya $J(a)$ terbentang di sebelah kiri $J(c)$. Jadi, bila (a, b) dan (b, c) adalah busur dengan arah yang didefinisikan dengan cara tersebut, maka (a, c) juga masuk dalam arah tersebut. Jadi G^c memiliki arah yang transitif. $\square$

Teorema 2. Graf G adalah graf interval bila dan hanya bila G tidak memuat C_4 sebagai graf bagian yang diinduksi dan G^c memiliki arah yang transitif.

Bukti : Karena syarat perlu dari teorema ini sudah dibuktikan di Teorema 1, maka di sini tinggal dibuktikan syarat cukupnya. Andaikan G tidak memuat C_4 sebagai graf bagian yang diinduksi dan G^c memiliki arah yang transitif. Selanjutnya, perhatikan himpunan klik-klik maksimal dari G dan lengkapi himpunan tersebut dengan urutan linear. Bila A dan B adalah dua klik maksimal yang berbeda dari G , maka untuk setiap $a \in A$, ada $b \in B$ dengan $ab \notin E(G)$. (Bila tidak, maka

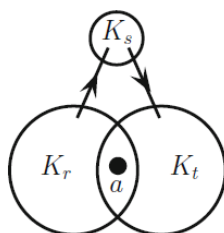
$G[A \cup B]$ merupakan klik dari G yang secara sejati memuat A dan B , kontradiksi, karena A dan B adalah dua klik maksimal dalam G). Bila ab memiliki arah dari a ke b dalam arah yang transitif dari G^c , kita nyatakan $A < B$. Urutan ini terdefinisi dengan baik dalam arti bahwa bila $a' \in A$ dan $b' \in B$ dengan $a'b' \in E(G^c)$, maka $a'b'$ harus diberi arah dari a' ke b' dalam G^c (Gambar 3).



Gambar 3. Graf untuk bukti Teorema 2.

Untuk melihat ini, pertama andaikan bahwa $a \neq a'$ dan $b \neq b'$ dan bahwa garis $a'b'$ diberi arah dari b' ke a' dalam G^c . Maka paling sedikit satu garis ab' dan $a'b$ di G^c . Kalau tidak, maka $aa', a'b, bb'$, dan $b'a$ membentuk C_4 di G , kontradiksi. Andaikan bahwa $a'b$ di $E(G^c)$. Maka bila $a'b$ diberi arah dari a' ke b dalam G^c , dengan sifat transitif dalam G^c , $b'b \in E(G^c)$, kontradiksi. Argumen yang sama berlaku bila ba', ab' atau $b'a$ adalah busur berarah dari G^c . Kasus $a = a'$ atau $b = b'$ dapat coba dicoba dengan cara yang serupa. Jadi, bila satu busur dari G^c adalah dari A ke B , maka semua busur antara A dan B arahnya adalah dari A ke B di G^c . Dalam kasus ini, dinyatakan bahwa $A < B$. Karena banyaknya klik maksimal dari G , berhingga, dan setiap dua klik maksimal dapat diurutkan oleh " $<$ ", diperoleh urutan linear dari klik-klik maksimal dari G , katakan, $K_1 < K_2 < \dots < K_p$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa bila titik a berada di K_r dan K_t , dengan $K_r < K_t$, maka a juga di K_s , dengan $K_r < K_s < K_t$ (lihat Gambar 4).



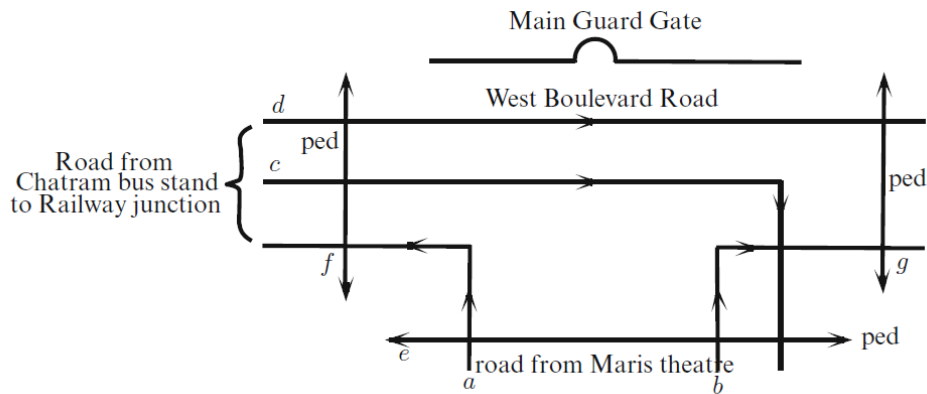
Gambar 4. Pengurutan klik-klik maksimal.

Andaikan $a \notin K_s$. Pertama, perhatikan bahwa ada titik b di K_s sedemikian hingga b tidak bertetangga dengan a . Jika tidak, $K_s \vee \{a\}$ menjadi klik yang memuat secara sejati K_s , kontradiksi. Tapi, karena $K_r < K_s$, garis ab dari G^c harus diberi arah dari a ke b . Tetapi $a \in K_t$, dan ini berarti bahwa $K_t < K_s$, kontradiksi. Jadi, $a \in K_t$.

Dalam $\{1, 2, \dots, p\}$, i adalah bilangan terkecil dan j adalah bilangan terbesar sedemikian hingga $a \in K_i$ dan $a \in K_j$. Kemudian didefinisikan $J(a)$ adalah interval tertutup $[i, j]$. Maka $J(a) \cap J(b) \neq \emptyset$ bila dan hanya bila ada bilangan bulat positif k sedemikian hingga $k \in J(a) \cap J(b)$. Namun ini terjadi bila dan hanya bila a dan b keduanya di K_k [yaitu bila dan hanya bila $ab \in E(G)$]. Jadi, G adalah graf interval. $\square$

Aplikasi Graf Interval Pada Pengaturan Waktu Lampu Lalu Lintas.

Akan dibahas aplikasi graf interval pada pengaturan waktu lampu lalu lintas. Yang menjadi masalah adalah memasang lampu lalu lintas di persimpangan jalan sedemikian hingga efisien dan arus lalu lintasnya lancar. Dengan menggunakan salah satu contohnya adalah persimpangan jalan Main Guard Gate di Tiruchirappalli, Tamil Nadu (India), dengan arus lalu lintas a, b, c, d, e, f , dan g seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 5.

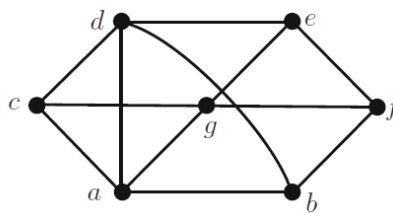


Gambar 5. Arus lalu lintas di persimpangan jalan (ped = tempat penyeberangan pejalan kaki).[3]

Arus lalu lintas dikatakan ‘kompatibel’ bila arus-arus tersebut mengalir bersamaan tidak bertabrakan. Sebagai contoh, dalam Gambar 5, arus a dan b kompatibel, sedangkan b dan g tidak. Pengaturan lampu sedemikian hingga ketika lampu hijau menyala di dua persimpangan arus-arusnya haruslah kompatibel. Diandaikan total waktu yang diperlukan untuk lampu hijau dan merah menyala selama satu siklus adalah dua menit.

Selanjutnya dibentuk *graf kompatibel* G yang berasosiasi dengan masalah tersebut yaitu graf yang himpunan titiknya terdiri dari arus-arus lalu lintas dalam Gambar 5, dan dua titik bertetangga bila dan hanya bila arus-arus yang bersesuaian dengan titik-titik tersebut kompatibel. Garf kompatibel dari Gambar 5 adalah Gambar 6.

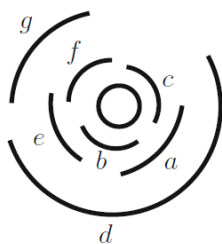
Kemudian dibuat lingkaran atau siklus dan asumsikan bahwa kelilingnya sama dengan periode total siklus, yaitu 120 detik. Kita mungkin berpikir bahwa durasi ketika suatu arus lalu lintas mendapat lampu hijau sesuai dengan busur lingkaran ini. Oleh karena itu, dua busur lingkaran semacam itu hanya dapat tumpang tindih jika aliran yang bersangkutan kompatibel. Grafik busur yang dihasilkan mungkin bukan grafik kompatibel karena kita tidak memerlukan agar dua busur saling berpotongan setiap kali mereka mewakili aliran yang kompatibel. (Mungkin ada dua aliran yang kompatibel, tetapi mereka tidak perlu mendapatkan lampu hijau pada waktu yang sama.) Namun, grafik irisan H dari grafik busur lingkaran ini akan menjadi graf bagian yang merentang graf kompatibel.



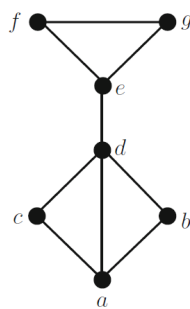
Gambar 6. Graf kompatibel dari Gambar 5.

Efisiensi dari pengaturan lampu lalu lintas dilakukan dengan cara meminimumkan waktu untuk lampu merah menyala, yaitu total waktu tunggu untuk semua arus lalu lintas selama siklus. Untuk jelasnya, diasumsikan bahwa waktu mulai, semua lampu menyala merah. Ini akan menjamin bahwa H adalah graf interval.

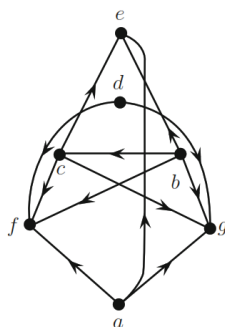
Gambar 7 memberikan pengaturan lampu hijau yang mungkin yang bersesuaian dengan graf irisan yang diberikan dalam Gambar 8. Klik maksimal dari H adalah $K_1 = \{a, b, d\}$, $K_2 = \{a, c, d\}$, $K_3 = \{d, e\}$, dan $K_4 = \{e, f, g\}$. Karena H adalah graf interval, dengan Teorema 1, H^c memiliki arah yang transitif. Arah yang transitif dari H^c diberikan dalam Gambar 9.



Gambar 7. Pengaturan lampu



Gambar 8. Graf irisan dari Gambar 8

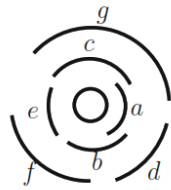


Gambar 9.

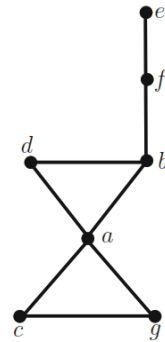
Karena (b, c) , (c, e) dan (d, f) adalah busur di H^c , dan karena $b \in K_1$, $c \in K_2$, $d, e \in K_3$, dan $f \in K_4$, dan seterusnya, maka $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$ adalah pengurutan klik-klik maksimal dari H . Setiap klik K_i , $i = 1, 2, 3, 4$, bersesuaian dengan fase di mana semua aliran dalam klik tersebut menyala hijau. Kemudian memulai arus lalu lintas tertentu dengan lampu hijau pada fase pertama di mana arus tersebut muncul, dan dipertahankan dalam keadaan hijau hingga fase terakhir di mana arus tersebut muncul. Karena adanya pengurutan fase K_i , hal ini membentuk busur pada lingkaran jam. Dalam fase 1, arus lalu lintas a , b , dan d lampunya menyala hijau; dalam fase 2 arus a , c , dan d menyala hijau, dan seterusnya.

Andaikan untuk setiap fase K_i diberi dengan durasi d_i . Tujuan kita adalah menentukan $d_i (\geq 0)$ sedemikian hingga total waktu tunggu minimum. Selanjutnya, diasumsikan bahwa waktu minimum lampu hijau menyala adalah 20 detik. Arus a menerima lampu merah ketika fase K_3 dan K_4 menerima lampu hijau. Dari sini waktu total lampu merah arus a adalah $d_3 + d_4$. Secara sama, waktu total lampu merah dari arus-arus lalu lintas b, c, d, e, f , dan g berturut-turut adalah

$d_2 + d_3 + d_4$, $d_1 + d_3 + d_4$, d_4 , $d_1 + d_2$, $d_1 + d_2 + d_3$, dan $d_1 + d_2 + d_3$. Maka, waktu total lampu merah menyala untuk semua arus lalu lintas dalam satu siklus adalah $Z = 4d_1 + 4d_2 + 4d_3 + 3d_4$. Tujuan kita adalah meminimumkan Z dengan syarat $d_i \geq 0$, untuk $1 \leq i \leq 4$, dan $d_1 + d_2 \geq 20$, $d_1 \geq 20$, $d_2 \geq 20$, $d_1 + d_2 + d_3 \geq 20$, $d_3 + d_4 \geq 20$, $d_4 \geq 20$, $d_3 \geq 20$, dan $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 120$. (Syarat $d_1 + d_2 \geq 20$ menunjukkan bahwa waktu yang dibutuhkan untuk lampu hijau menyala untuk arus a , misalnya, adalah jumlah dari waktu untuk lampu hijau dari fase K_1 dan K_2 , paling sedikit 20. Alasan yang serupa berlaku untuk pertidaksamaan-pertidaksamaan yang lain. Syarat terakhir menunjukkan total waktu siklus.) Penyelesaian optimal untuk masalah ini adalah $d_1 = 80$, $d_2 = 20$, $d_3 = 0$, dan $d_4 = 20$ dan minimum $Z = 480$ (detik). Tapi ini belum selesai. Ada graf busur sirkular yang lain, yaitu Gambar 10, a dan b, yang memberikan pengaturan lampu hijau lain yang mungkin dan graf irisan yang bersesuaian dengan graf tersebut.



Gambar 10a



Gambar 10b

Terhadap graf ini, minimum $Z = 500$ detik. Jadi, kita harus mencoba semua graf busur sirkular dan menghitung nilai terkecil yang akan menjadi fase terbaik dari lampu lalu lintas tersebut. Untuk masalah di atas, nilai minimumnya adalah 480 detik.

Kesimpulan

Dari uraian di atas diperoleh kesimpulan tentang graf interval yaitu sebagai berikut :

1. Misal G adalah graf interval, maka G^c memiliki orientasi transitif.
2. Graf G adalah graf interval bila dan hanya bila G tidak memuat C_4 sebagai graf bagian yang diinduksi dan G^c memiliki arah yang transitif.
3. Salah satu aplikasi graf interval adalah untuk mencari Solusi optimal dari masalah pengaturan lampu lalu lintas.

Daftar Pustaka

- [1] Gross, J.L., Yellen, J., Anderson, M. (2019). *Graph Theory and Its Applications*. (3rd ed.). Boca Raton : Taylor and Francis Group.
- [2] Wilson, R.J., (1996). *Introduction to Graph Theory*. (4th ed.). England : Addison Wesley Longman Limited.
- [3] Balakhrisnan, R., Ranganathan, K. (2012). *A Textbook of Graph Theory*. (2nd ed.). New York : Springer Science + Business Media.
- [4] Bharali, A., Baruah, A.K. (2013). *Optimal Feasible Green Light Assignment to a Traffic Intersection using Intersection Graph*, International Journal of Computer Applications (0975-8887), Volume 65 – No.12. March 2013.